Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Б. Ю. КОГАН

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕХАНИКИ К ГЕОМЕТРИИ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 41

Б. Ю. КОГАН

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕХАНИКИ К ГЕОМЕТРИИ

Y6324

БИБЛИОТЕКА НМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

К 57
УДК 513.0 + 531.01

Борис Юрьевич Коган

Приложение механики к геометрии

М., 1965 г., 56 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше* Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 2/XII 1964 г. Подписано к печати 8/II 1965 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 1,75. Условн. печ. л. 2,87. Уч.-изд. л. 2,58. Тираж 39 000 экз. Т-03080. Цена книги 8 коп. Заказ № 2099.

Издательство «Наука».

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.

Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в гос. типографии «Пяргале», Вильнюс ул. Латако, 6. Заказ № 1388.

§ 1. СЛОЖЕНИЕ СИЛ

1. Основные положения. В этой главе мы докажем некоторые геометрические теоремы, используя основные понятия и правила статики. Напомним их.

1. *Сила* является вектором и характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Прямая, вдоль которой действует сила, называется ее *линией действия*.

2. Тело, неспособное деформироваться, т. е. сохраняющее свои размеры и форму, называется *абсолютно твердым*.

Практически каждое тело подвержено тем или иным деформациям, но эти деформации часто бывают настолько малы, что ими можно пренебречь. Таким образом, представление об абсолютно твердом теле является идеализацией.

Слово «абсолютное» часто опускают и говорят просто «твердое тело».

3. Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называется *системой сил*. Система сил называется *уравновешенной*, если, будучи приложенной к абсолютно твердому покоящемуся телу, она не вызывает его движения. О силах такой системы говорят, что они *находятся в равновесии*, или *уравновешиваются*.

4. Две системы сил называются *эквивалентными*, если, будучи приложены к абсолютно твердому телу, они оказывают на него одинаковое действие.

Из этого определения следует, что, рассматривая систему сил, действующих на некоторое твердое тело, мы имеем право заменить ее любой другой системой сил, эквивалентной данной.

5. Если система сил эквивалентна некоторой одной силе R, то говорят, что сила R является *равнодействующей* этой системы.

Заметим, что не всякая система сил имеет равнодействующую. Простейшим примером системы, не имеющей равнодействующей, является так называемая пара сил (рис. 1).

Помимо перечисленных понятий, мы будем пользоваться следующими правилами (аксиомами) статики:

I. *Силы* F_1, F_2, *приложенные в одной точке, имеют равнодействующую* R, *приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на силах* F_1, F_2 (рис. 2).

Это правило известно под названием *правила параллелограмма сил.* Оно позволяет заменять силы F_1, F_2 силой R, и, наоборот, заменять данную силу R силами F_1, F_2.

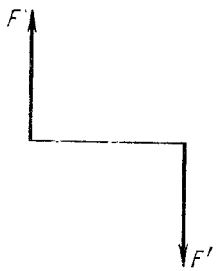

Рис. 1.

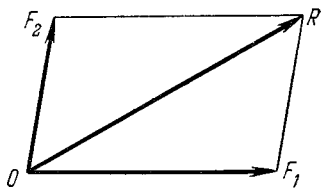

Рис. 2.

В первом случае говорят о *сложении* сил, во втором — о *разложении* силы R на составляющие F_1, F_2. (Это разложение, очевидно, можно выполнить бесчисленным множеством способов, так как можно построить бесконечно много параллелограммов с заданной диагональю R.)

II. *Если к системе сил прибавить (или отнять от нее) произвольную уравновешенную систему, то полученная система сил будет эквивалентна первоначальной.*

Из этого правила, в частности, вытекает, что совокупность нескольких уравновешенных систем сил также является уравновешенной системой.

III. *Для того чтобы две силы находились в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую величину, противоположные направления и общую линию действия* (рис. 3 и 4).

IV. *Силу, действующую на твердое тело, можно произвольным образом переносить вдоль ее линии действия.*

Иначе говоря, если силы F и F' одинаковы по величине и направлению и имеют общую линию действия, то они эквивалентны (рис. 5). Верно и обратное: если силы F и F' эквивалентны, то они одинаковы по величине и направлению и имеют общую линию действия *).

Рис. 3.

Рис. 4.

Из правила IV следует, что для силы, приложенной к твердому телу, существенна не точка приложения, а линия действия. Поэтому вектор такой силы называют *скользящим*.

Правило IV дает возможность складывать силы, имеющие разные точки приложения и *пересекающиеся* линии действия. Пусть, например, нужно сложить силы F_1, F_2, приложенные так, как показано на рис. 6. Так как векторы этих сил являются скользящими, то их можно перенести в точку O, после чего, пользуясь правилом I, получим равнодействующую R сил F_1, F_2.

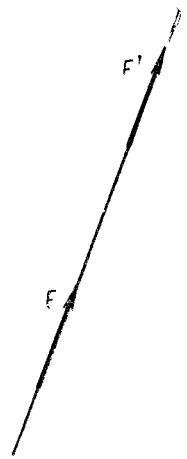

Рис. 5.

Из правил III и IV вытекает следующее важное предложение:

Если на твердое тело действуют три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости и находящиеся в равновесии, то их линии действия пересекаются в одной точке.

В самом деле, пусть силы P_1, P_2, P_3 взаимно уравновешиваются (рис. 7). Перенося силы P_1, P_2 в точку O, получаем их равнодействующую R_{12}. Следовательно, силы P_3 и R_{12} находятся в равновесии. Но это возможно только в том случае, когда они имеют общую линию действия. Отсюда следует, что линия действия силы P_3 проходит через

*) Правило IV можно вывести из правила III. Мы этого не делаем, так как каждое из этих правил является очевидным.

точку O, т. е. что в этой точке пересекаются линии действия всех трех сил.

Пользуясь этим предложением, мы сейчас докажем некоторые теоремы геометрии.

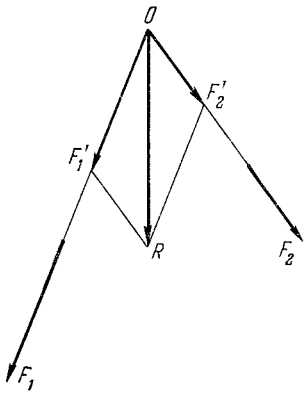

Рис. 6.

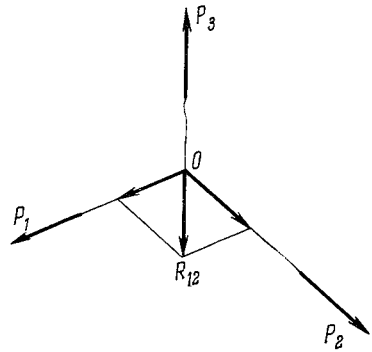

Рис. 7.

2. Теорема о биссектрисах углов треугольника. Рассмотрим шесть *равных* сил F_1, F_2, ..., F_6, действующих вдоль сторон треугольника, изображенного на рис. 8. Так как эти силы, очевидно, взаимно уравновешиваются, то показанные на рисунке равнодействующие R_{16}, R_{23}, R_{45} также будут находиться в равновесии. Но силы R_{16}, R_{23}, R_{45} направлены вдоль биссектрис внутренних углов A, B, C. Следовательно, *биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.*

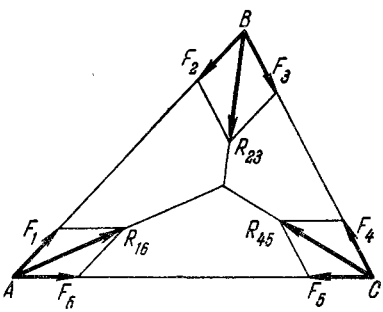

Рис. 8.

3. Вторая теорема о биссектрисах углов треугольника. Рассмотрим шесть *равных* сил F_1, F_2, ..., F_6, изображенных на рис. 9. Легко видеть, что эти силы находятся в равновесии (так как сила F_1 уравновешивается силой F_2, сила F_3 — силой F_4 и сила F_5 — силой F_6). Но равнодействующая сил F_1 и F_6 направлена по биссектрисе внешнего угла A,

равнодействующая сил F_4 и F_5 — по биссектрисе внешнего угла C и равнодействующая сил F_2 и F_3 — по биссектрисе внутреннего угла B. Следовательно, *биссектрисы двух внешних и одного внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.*

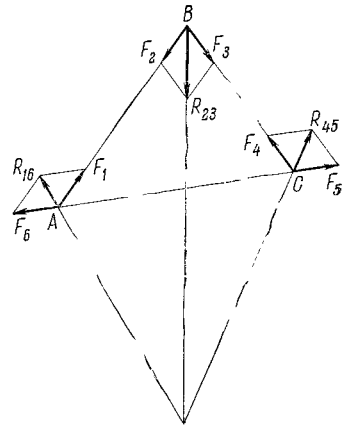

Рис. 9.

4. Теорема о высотах треугольника. На рис. 10 изображен треугольник ABC, вдоль сторон которого действуют силы $F_1, F_2, \ldots, F_6$. Выберем их так, чтобы имели место равенства

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= F_2 = F\cos A,\\ F_3 &= F_4 = F\cos B,\\ F_5 &= F_6 = F\cos C, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где F — произвольная величина, имеющая размерность силы. Так как силы $F_1, F_2, \ldots, F_6$, очевидно, взаимно уравновешиваются, то линии действия изображенных на рисунке равнодействующих R_A, R_B, R_C должны пересекаться в одной точке. Найдем направления этих равнодействующих.

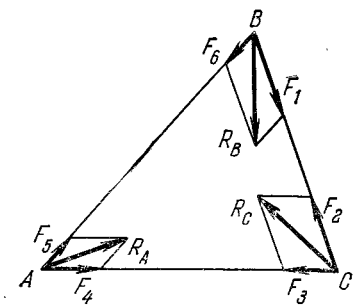

Рис. 10.

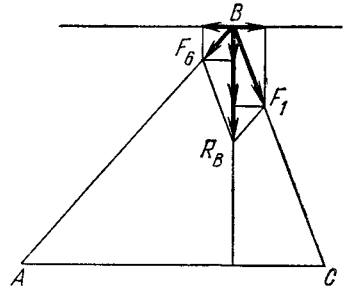

Рис. 11.

Сложим, например, силы F_1 и F_6, приложенные в вершине B (рис. 11). Для этого разложим каждую из них на две составляющие, одна из которых параллельна стороне AC, а другая перпендикулярна. Первую из этих составляющих будем называть горизонтальной, а вторую — вертикальной.

Из рис. 11 видно, что горизонтальные составляющие сил F_1 и F_6 равны $F_1 \cos C$ и $F_6 \cos A$. Но из (1) следует, что $\frac{F_1}{F_6} = \frac{\cos A}{\cos C}$, откуда

$$F_1 \cos C = F_6 \cos A.$$

Таким образом, горизонтальные составляющие сил F_1 и F_6 одинаковы. Из этого заключаем, что они взаимно уничтожаются, и, следовательно, равнодействующая сил F_1 и F_6 перпендикулярна к стороне AC. Таким образом, сила R_B направлена по высоте, опущенной на сторону AC.

Аналогично придем к выводу, что силы R_A и R_C идут вдоль двух других высот треугольника ABC. Следовательно, *высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

5. Теорема о медианах треугольника. Рассмотрим силы F_1, F_2, ..., F_6, приложенные так, как показано на рис. 12. Пусть вектор каждой из этих сил имеет длину, равную половине соответствующей стороны треугольника. Тогда равнодействующая сил F_1 и F_6 будет изображаться медианой, проведенной к стороне BC, равнодействующая сил F_2 и F_3 — медианой, проведенной к стороне AC, и равнодействующая сил F_4 и F_5 — медианой, проведенной к стороне AB (см. параллелограммы сил, показанные на рис. 12). А так как силы F_1, F_2, ..., F_6 взаимно уравновешиваются, то *медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

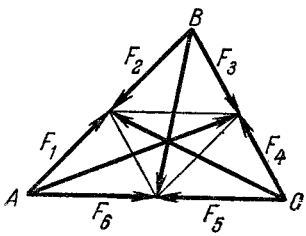

Рис. 12.

6. Обобщение теоремы о биссектрисах внутренних углов треугольника. Пусть дан треугольник ABC. Проведем прямую a, делящую угол A на части α_1, α_2, прямую b, делящую угол B на части β_1, β_2, и прямую c, делящую угол C на части γ_1, γ_2 (рис. 13). Приложим в точке A произвольную силу R_1, направленную вдоль прямой a, и разложим ее на составляющие P_1, Q_1, идущие по сторонам AC и AB. Далее, приложим в точках B и C силы R_2 и R_3, направленные вдоль прямых b и c, и разложим их на составляющие P_2, Q_2 и P_3, Q_3. При этом силу R_2 выберем так, чтобы составляющая P_2 была равна составляющей Q_1, а силу R_3 — так, чтобы составляющая P_3 была равна со-

ставляющей Q_2. Таким путем мы получим систему сил (R_1, R_2, R_3), эквивалентную системе (P_1, Q_3).

Рассмотрим отношения

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2},\quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},\quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Из параллелограммов при вершинах A, B, C видно, что

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{Q_1}{P_1},$$

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{Q_2}{P_2},$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{Q_3}{P_3},$$

и поэтому

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{Q_1}{P_1}\frac{Q_2}{P_2}\frac{Q_3}{P_3}.$$

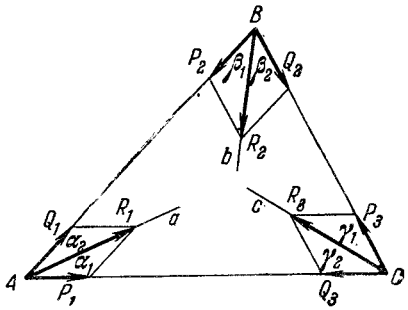

Рис. 13.

Но так как $P_2=Q_1$ и $P_3=Q_2$, то

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{Q_3}{P_1}. \tag{2}$$

Далее возможны два случая.

Случай 1.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1. \tag{3}$$

Тогда $P_1=Q_3$, т. е. силы P_1 и Q_3 уравновешиваются, и следовательно, уравновешиваются эквивалентные им силы R_1, R_2, R_3. Отсюда заключаем, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке.

Случай 2.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\neq 1.$$

Тогда согласно равенству (2) $P_1\neq Q_3$. Докажем, что в этом случае прямые a, b, c не могут пересекаться в одной точке. Действительно, предположим, что они пересекаются в точке O (рис. 14). В этом случае, перенеся силы R_1, R_2, R_3 в точку O, можно найти их равнодействующую R, которая также будет приложена в этой точке. Далее, так

как система (R_1, R_2, R_3) эквивалентна системе (P_1, Q_3), то равнодействующая R должна быть эквивалентна равнодействующей сил P_1, Q_3. Но это невозможно, ибо равнодействующая сил P_1, Q_3 лежит на прямой AC, а линия действия силы R не совпадает с прямой AC (так как точка O не лежит на этой прямой). Полученное противоречие показывает, что прямые a, b, c не пересекаются в одной точке.

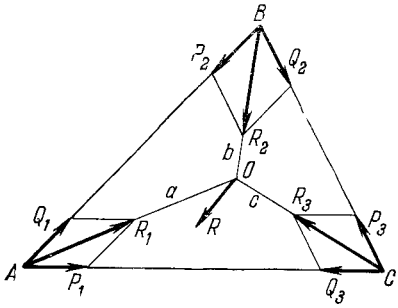

Рис. 14.

Итак, изображенные на рис. 13 прямые пересекаются в одной точке лишь тогда, когда имеет место равенство (3). Другими словами, *для того чтобы прямые a, b, c пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3).

Доказанную теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о биссектрисах внутренних углов треугольника. (В теореме о биссектрисах единице равно не только произведение (3), но и каждое из отношений $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$, $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$.)

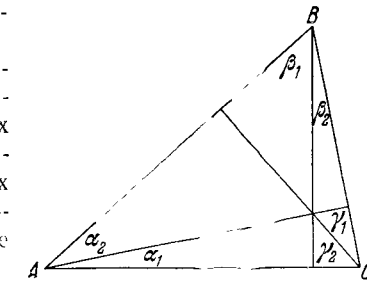

Рис. 15.

Из полученной теоремы легко выводится также теорема о высотах треугольника (рис. 15). В этом случае

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\cos C}{\cos B},\quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{\cos A}{\cos C},\quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\cos B}{\cos A}$$

и

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\,\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\cos C}{\cos B}\,\frac{\cos A}{\cos C}\,\frac{\cos B}{\cos A}=1.$$

Следовательно, высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7. Теорема Чевы. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть вдоль сторон AC и AB действуют силы F_1 и F_2, равнодей-

ствующая которых направлена по прямой AA_1 (рис. 16). Проведем прямую DE, параллельную стороне BC, и разложим силу F_1 на составляющие F_1', F_1'', а силу F_2 — на составляющие F_2', F_2''. Из чертежа видно, что

$$\frac{F_1'}{F_1} = \frac{A_1C}{CA}, \quad \frac{F_2'}{F_2} = \frac{BA_1}{AB},$$

откуда

$$F_1' = F_1 \frac{A_1C}{CA}, \quad F_2' = F_2 \frac{BA_1}{AB}.$$

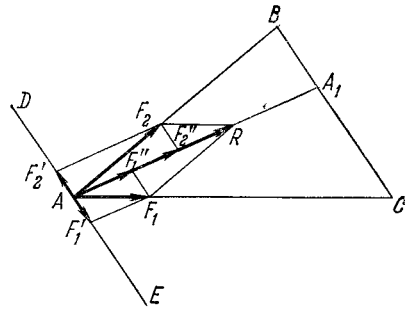

Рис. 16.

Но так как равнодействующая сил F_1, F_2 направлена вдоль AA_1, то $F_1' = F_2'$. Следовательно,

$$F_1 \frac{A_1C}{CA} = F_2 \frac{BA_1}{AB},$$

или

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C}. \qquad (4)$$

Это соотношение понадобится нам в дальнейшем. (Оно легко запоминается, так как правая часть этого равенства получается в результате обхода треугольника CAB по часовой стрелке.)

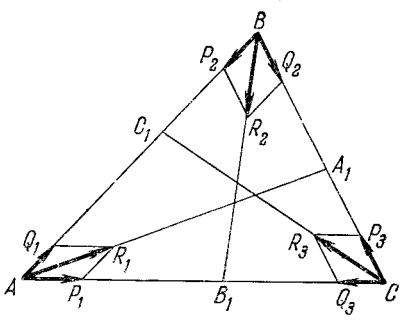

Рис. 17.

Возьмем теперь на сторонах треугольника ABC точки A_1, B_1, C_1 и соединим их с противолежащими вершинами (рис. 17). Приложим в точках A, B, C силы R_1 R_2, R_3, направленные вдоль прямых AA_1, BB_1, CC_1, и разложим их на составляющие, направленные по сторонам треугольника. При этом силу R_1 выберем произвольно, а силы R_2 и R_3 — так, чтобы выполнялись

равенства

$$P_2 = Q_1, \quad P_3 = Q_2. \tag{5}$$

Далее, согласно (4) будем иметь:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{CA}{AB}\,\frac{BA_1}{A_1C}, \qquad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{AB}{BC}\,\frac{CB_1}{B_1A}, \qquad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{BC}{CA}\,\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{P_1}{Q_1}\,\frac{P_2}{Q_2}\,\frac{P_3}{Q_3} = \frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A}\,\frac{AC_1}{C_1B}$$

или, изменяя порядок сомножителей и учитывая (5),

$$\frac{AC_1}{C_1B}\,\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{P_1}{Q_3}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь два случая.

Случай 1.

$$\frac{AC_1}{C_1B}\,\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{7}$$

Тогда $P_1 = Q_3$, т. е. эти силы уравновешиваются. Следовательно, силы R_1, R_2, R_3 находятся в равновесии и, стало быть, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Случай 2.

$$\frac{AC_1}{C_1B}\,\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A} \neq 1.$$

Тогда согласно (6) силы P_1 и Q_3 различны. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к выводу, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 не пересекаются в одной точке.

Таким образом, *для того чтобы прямые* AA_1, BB_1, CC_1 *пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* (7). Эта теорема носит название теоремы Чевы*).

Частным случаем доказанной теоремы является теорема о медианах треугольника (в этом случае $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1$). Поэтому теорему Чевы можно рассматривать как обобщение теоремы о медианах.

*) Теорема Чевы, так же как теорема, доказанная в предыдущем пункте, может быть распространена на случай, когда рассматриваемые прямые пересекаются *вне* треугольника ABC

Из теоремы Чевы легко получается теорема о биссектрисах внутренних углов треугольника. В этом случае

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC},\ \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC},\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{AB},$$

и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\,\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC}{BC}\,\frac{AB}{AC}\,\frac{BC}{AB}=1,$$

т. е. выполняется равенство (7).

8. О точке приложения равнодействующей. Сделаем одно замечание относительно понятия равнодействующей. Пусть сила R является равнодействующей нескольких сил, приложенных в *различных* точках твердого тела. Так как вектор R — скользящий, то, перенося его вдоль линии действия, мы можем изменить точку его приложения. Но поскольку у силы R нет *фактической* точки приложения (ибо она не является *фактически* приложенной силой), то любая точка на ее линии действия может рассматриваться как точка ее приложения. Таким образом, равнодействующая сил, приложенных в различных точках твердого тела, имеет *определенную* линию действия, но *не имеет определенной* точки приложения. В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим силы F_1, F_2, F_3, показанные на рис. 18. Чтобы найти их равнодействующую, мы сначала сложим силы F_1 и F_2, а затем их равнодействующую R_{12} сложим с силой F_3. Таким путем мы окончательно получим равнодействующую R, приложенную в точке C. Поступим теперь иначе: сначала сложим силы F_1 и F_3, а потом сложим их равнодействующую R_{13} с силой F_2. В результате получится равнодействующая R', приложенная в точке D. Таким образом, складывая различным путем силы F_1, F_2, F_3, мы получили разные точки приложения равнодействующей. (Однако

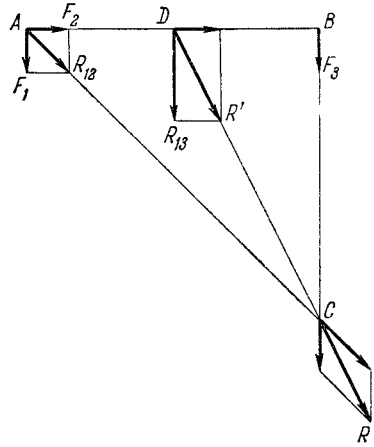

Рис. 18.

можно утверждать, что силы R и R' имеют общую линию действия и $R = R'$.)

Из изложенного вытекает следующее правило:

Если, складывая различным путем силы, мы получаем несколько различных точек приложения их равнодействующей, то эти точки лежат на одной прямой (на линии действия равнодействующей).

Мы используем сейчас это правило для доказательства двух теорем.

9. Третья теорема о биссектрисах углов треугольника. Пусть вдоль сторон треугольника ABC действуют силы F_1, F_2, F_3 (рис. 19). Будем искать их равнодействующую, считая, что эти силы имеют *одинаковую величину*.

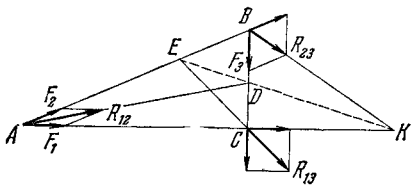

Рис. 19.

Сложив силы F_1 и F_2, получим их равнодействующую R_{12}, идущую вдоль биссектрисы AD. Сложив затем силу R_{12} с силой F_3, найдем равнодействующую сил F_1, F_2, F_3, причем она будет приложена в точке D.

Сложив сначала силы F_1 и F_3, получим их равнодействующую R_{13}, которая будет лежать на продолжении биссектрисы CE. Сложив затем силу R_{13} с силой F_2, получим равнодействующую сил F_1, F_2, F_3, которая будет приложена в точке E.

Сложив сначала силы F_2 и F_3, найдем их равнодействующую R_{23}, идущую вдоль биссектрисы BK внешнего угла B. Сложив потом силу R_{23} с силой F_1, получим некоторую равнодействующую, которая будет приложена в точке K.

Таким образом, складывая различными способами силы F_1, F_2, F_3, мы сначала получили равнодействующую, приложенную в точке D, затем в точке E и, наконец, — в точке K. Следовательно, точки E, D, K лежат на одной прямой. Учитывая, что каждая из этих точек является основанием соответствующей биссектрисы, приходим к теореме:

Основания биссектрис двух внутренних и одного внешнего угла треугольника лежат на одной прямой *).

*) При этом предполагается, что биссектриса внешнего угла *пересекает* противоположную сторону, т. е. не параллельна ей. Это замечание относится и к следующей теореме.

10. Четвертая теорема о биссектрисах углов треугольника. Проведя аналогичные рассуждения в отношении трех

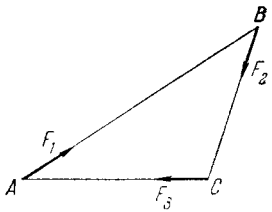

Рис. 20.

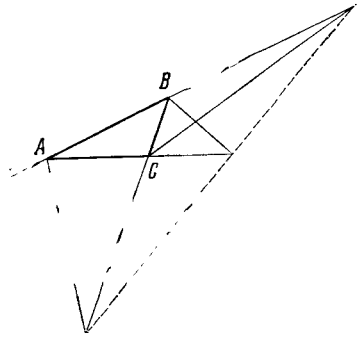

Рис. 21.

равных сил F_1, F_2, F_3, расположенных как показано на рис. 20, получим теорему:

Основания биссектрис трех внешних углов треугольника лежат на одной прямой (рис. 21).

§ 2. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ВЕЧНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Некоторые геометрические теоремы можно доказать, используя постулат о невозможности вечного двигателя. В этом параграфе мы рассмотрим несколько таких теорем.

11. Момент силы. Кроме постулата о невозможности вечного двигателя, мы будем пользоваться правилом моментов. Напомним его.

Пусть тело находится под действием силы F и может вращаться вокруг оси z (рис. 22). Как известно, вращательное действие силы F определяется ее моментом относительно оси z. Чтобы вычислить этот момент, силу F раскладывают на составляющие F' и F'', первая из которых перпендикулярна к оси z, а вторая — ей параллельна. Вращательное действие составляющей F'', очевидно, равно

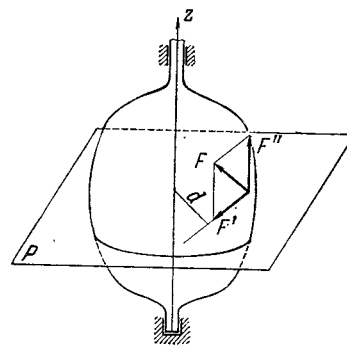

Рис. 22.

нулю, а вращательное действие составляющей F' измеряется произведением $F'd$, где d — расстояние между осью z и линией действия силы F'. Это произведение называется *моментом силы F относительно оси z.*

Так как сила F' является проекцией силы F на плоскость P, то можно дать следующее определение момента:

Моментом силы F относительно оси z называется произведение $F'd$, где F' — проекция силы F на плоскость, перпендикулярную к оси z, а d — расстояние между осью z и линией действия проекции F'.

Таким образом,

$$M_z(F) = F'd,$$

где $M_z(F)$ — момент силы F относительно оси z.

Из определения момента силы вытекает, что он равен нулю лишь в двух случаях: когда линия действия силы F пересекает ось z или когда она ей параллельна (т. е. когда линия действия силы F не скрещивается с осью z).

Если, как это часто бывает, сила F перпендикулярна к оси z, то $F' = F$, и поэтому

$$M_z(F) = Fd.$$

В этом случае расстояние d называют *плечом силы F.*

Моменту силы приписывают определенный знак. С этой целью одно из направлений вращения принимают за положительное, а другое — за отрицательное. Тогда, если сила стремится вращать тело в положительном направлении, ее момент считается положительным, а в противоположном случае — отрицательным. Поэтому можно написать

$$M_z(F) = \pm F'd,$$

где знак определяется направлением вращения.

Для моментов сил справедливы два следующих правила:

I. *Если R — равнодействующая системы $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то момент силы R равен алгебраической сумме моментов сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$* *).

Это правило можно записать в виде

$$M_z(R) = M_z(F_1) + M_z(F_2) + \ldots + M_z(F_n). \qquad (8)$$

Сумма (8) называется моментом сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ относительно оси z.

*) Это положение известно под названием теоремы Вариньона.

II (правило моментов). *Пусть твердое тело может вращаться вокруг неподвижной оси. Для того чтобы приложенные к нему силы не вызывали его вращения, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов равнялась нулю.*

(Иначе говоря, момент сил, стремящихся вращать тело в положительном направлении, должен иметь такую же величину, как момент сил, стремящихся вращать это тело в отрицательном направлении.)

12. Теорема о перпендикулярах к сторонам треугольника. Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямой треугольной призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ (рис. 23). Вообразим, что он наполнен газом, и на него не действуют никакие внешние силы, в том числе и сила тяжести. (Можно, например, представить, что он находится вдали от Земли и от других небесных тел.) В этом случае сосуд, очевидно, будет оставаться в покое, ибо какое бы положение он ни занял, он будет находиться в одних и тех же условиях. Поэтому если бы положение, которое он занимал первоначально, не было положением равновесия, то он не мог бы находиться в равновесии и в любом другом положении, т. е. мы получили бы вечный двигатель.

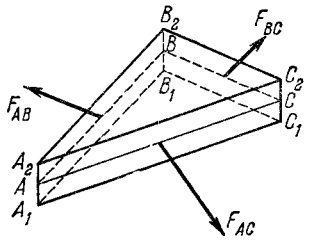

Рис. 23.

Итак, сосуд остается в покое. Из этого заключаем, что силы, с которыми газ действует на его стенки, будут уравновешиваться. Но так как давления на грани $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, очевидно, взаимно уравновешены, то должны уравновешиваться и силы F_{AB}, F_{BC}, F_{AC}, с которыми газ действует на боковые стенки сосуда. А так как эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия должны пересекаться в одной точке. Учитывая, что векторы F_{AB}, F_{BC}, F_{AC} перпендикулярны к сторонам треугольника ABC и приложены в серединах этих сторон (так как боковые грани имеют форму прямоугольников), приходим к теореме:

Перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в их серединах, пересекаются в одной точке.

13. Теорема Пифагора. Пусть сосуд имеет форму прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC (рис. 24). Наполним этот сосуд газом и дадим ему возможность вращаться вокруг вертикальной оси OO' (плоскость ABC — горизонтальна). Так как сосуд будет оставаться в покое (в противном случае получился бы вечный двигатель), то силы давления газа на его боковые грани должны взаимно уравновешиваться. Мы видим, что каждая из них стремится вращать сосуд вокруг оси OO': силы F_1 и F_2 — против часовой стрелки, а сила F_3 — по часовой стрелке. Поэтому сумма вращающих моментов сил F_1 и F_2 должна быть равна вращающему моменту силы F_3. Учитывая, что плечи этих сил равны $\frac{AB}{2}$, $\frac{BC}{2}$ и $\frac{AC}{2}$, получаем

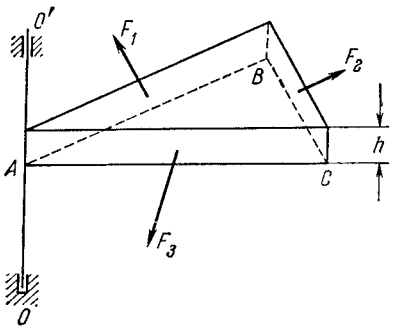

Рис. 24.

$$F_1 \frac{AB}{2} + F_2 \frac{BC}{2} = F_3 \frac{AC}{2}. \tag{9}$$

Но

$$F_1 = p\,(AB \cdot h),$$
$$F_2 = p\,(BC \cdot h),$$
$$F_3 = p\,(AC \cdot h),$$

где p — давление газа, а h — высота сосуда. Поэтому равенство (9) принимает вид

$$p\,(AB \cdot h)\frac{AB}{2} + p\,(BC \cdot h)\frac{BC}{2} = p\,(AC \cdot h)\frac{AC}{2},$$

откуда

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

Таким образом, мы доказали, *что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.*

Заменяя в этом доказательстве прямоугольный треугольник косоугольным, можно доказать теорему о квадрате стороны, лежащей против острого или тупого угла.

14. Теорема о касательной и секущей. Пусть сосуд с газом имеет форму прямой призмы, в основании которой лежит фигура ABC (рис. 25 изображает вид сверху; плоскость ABC горизонтальна). Пусть, далее, этот сосуд будет жестко скреплен со стержнем OB, а последний насажен на вертикальную ось O. Таким путем мы даем возможность сосуду вращаться вокруг этой оси. Дальше станем рассуждать так же, как в предыдущем пункте. Так как сосуд будет находиться в покое, то сумма моментов всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Но только две из этих сил создают вращающие моменты: это силы F_1 и F_2 давления газа на стенки AB и AC. (Силы давления газа на круговую стенку BC, очевидно, не создают момента, так как линия действия каждой такой силы проходит через ось O.) Учитывая, что моменты сил F_1 и F_2 имеют противоположные знаки и что плечи этих сил равны BK и LM, получаем

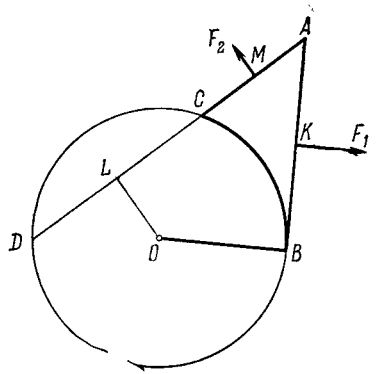

Рис. 25.

$$F_1 \cdot BK = F_2 \cdot LM.$$

Но $BK = \frac{AB}{2}$ и

$$LM = \frac{LC + LA}{2} = \frac{LD + LA}{2} = \frac{AD}{2}.$$

Следовательно,

$$F_1 \frac{AB}{2} = F_2 \frac{AD}{2},$$

т. е.

$$F_1 \cdot AB = F_2 \cdot AD. \qquad (10)$$

Далее, имеем

$$F_1 = p(AB \cdot h), \quad F_2 = p(AC \cdot h),$$

где p — давление газа, а h — высота сосуда. Подставив эти выражения в (10), получим

$$p(AB \cdot h)AB = p(AC \cdot h)AD,$$

откуда

$$AB^2 = AC \cdot AD. \qquad (11)$$

Обращаясь к окружности, изображенной на рис. 25, видим, что отрезок AB является касательной, отрезок AD — секущей и отрезок AC — внешней частью секущей. Таким образом, равенство (11) выражает известную геометрическую теорему: *квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.*

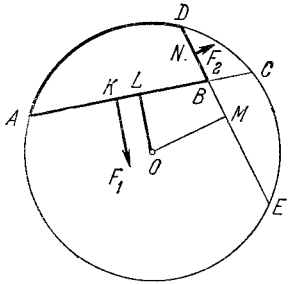

Рис. 26

15. Теорема о двух хордах. Если рассмотренный только что сосуд ABC заменить сосудом ABD, показанным на рис. 26, и провести рассуждения, подобные использованным при доказательстве предыдущей теоремы, то получим

$$F_1 \cdot KL = F_2 \cdot MN.$$

Далее, так как

$$KL = AL - AK = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2},$$

$$MN = DM - DN = \frac{DE}{2} - \frac{DB}{2} = \frac{DE - DB}{2} = \frac{BE}{2},$$

то

$$F_1 \frac{BC}{2} = F_2 \frac{BE}{2},$$

т. е.

$$F_1 \cdot BC = F_2 \cdot BE.$$

Но

$$F_1 = p(AB \cdot h), \quad F_2 = p(DB \cdot h),$$

и, следовательно,

$$p(AB \cdot h) \cdot BC = p(DB \cdot h) \cdot BE,$$

откуда

$$AB \cdot BC = DB \cdot BE. \qquad (12)$$

Равенство (12) выражает известную теорему о двух пересекающихся хордах круга.

§ 3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

В этом параграфе мы вычислим объемы и поверхности некоторых тел. При этом будут использованы понятия потенциальной энергии и работы, а также понятие центра тяжести.

16. Центр тяжести. На рис. 27 изображены две параллельные силы, направленные в одну сторону. Как известно,

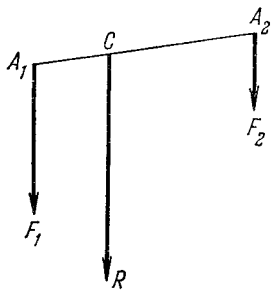

Рис. 27.

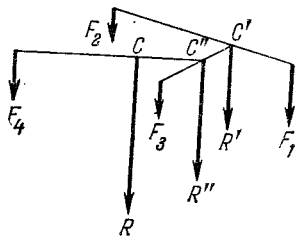

Рис. 28.

равнодействующая этих сил равна их сумме и направлена в ту же сторону, а ее линия действия проходит через точку C, определяемую равенством

$$\frac{A_1C}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{13}$$

Эта точка называется *центром параллельных сил* F_1, F_2. Ее можно рассматривать как точку приложения равнодействующей R.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из нескольких параллельных сил, например, из четырех (рис. 28). Чтобы найти их равнодействующую, будем по очереди складывать их друг с другом. При этом условимся, складывая каждый раз две параллельные силы, считать их равнодействующую приложенной *в центре этих сил*. Тогда, сложив силы F_1 и F_2, получим силу R', приложенную в точке C'; сложив затем силу R' с силой F_3, получим их равнодействующую R'', приложенную в точке C''; наконец, сложив силу R'' с силой F_4, получим равнодействующую R всех четырех сил. Она окажется приложенной в точке C и будет иметь величину $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$.

Описанным путем можно сложить любое количество параллельных сил и получить их равнодействующую, приложенную в некоторой точке C. Можно доказать, что положение точки C не зависит от порядка, в котором производится сложение сил. Эта точка называется *центром данной системы параллельных сил.*

Рассмотрим твердое тело, находящееся вблизи Земли (рис. 29). Если размеры этого тела малы по сравнению с радиусом Земли, то действующие на его частицы силы тяжести можно считать параллельными. Поэтому существует точка C, являющаяся центром этих сил. Она называется *центром тяжести* данного тела. Ее можно рассматривать как точку приложения силы P—веса этого тела.

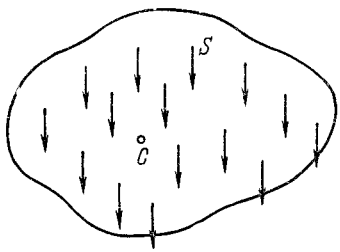

Рис. 29.

Пусть центром тяжести тела S является точка C. Из определения следует, что ее положение относительно тела S остается неизменным при любых перемещениях этого тела в пространстве. Следовательно, центр тяжести твердого тела есть точка, «жестко связанная» с этим телом.

Центр тяжести объема. Из равенства (13) видно, что положение точки C не изменится, если увеличить или уменьшить в одно и то же число раз силы F_1, F_2 (рис. 27). Отсюда следует, что при пропорциональном увеличении или уменьшении всех сил некоторой системы параллельных сил положение ее центра не изменится. Поэтому если изменить удельный вес однородного твердого тела, то его центр тяжести сохранит свое положение. Иначе говоря, центр тяжести однородного тела зависит только от его размера и формы. По этой причине центр тяжести такого тела называют также *центром тяжести его объема.*

Центр тяжести линии и площади. Подобно тому как в геометрии вводится понятие точки, в механике вводится понятие материальной точки.

Материальной точкой называется точка, обладающая определенной массой.

Это понятие отражает представление о теле, масса которого существенна, а размеры настолько малы, что ими можно пренебречь. (Разумеется, все зависит от масштаба

явления. Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, мы можем считать ее материальной точкой.)

Аналогично можно ввести понятие *материальной линии*. Под этим мы будем понимать *кривую конечной длины, обладающую некоторой массой*. Эту массу будем представлять себе распределенной по длине кривой.

Наконец, точно так же можно говорить и о *материальной фигуре*. Мы будем понимать под нею *плоскую фигуру, обладающую определенной массой, распределенной по ее площади*.

Наглядное представление о материальной линии дает тонкая проволока, а о материальной фигуре — тонкая пластинка. Чем тоньше такая проволока или пластинка, тем в большей степени она приближается к материальной линии или материальной фигуре.

Подобно тому как говорят об удельном весе тела, можно говорить и об удельном весе материальной кривой или материальной фигуры. Под ним следует понимать вес единицы ее длины или, соответственно, вес единицы ее площади. Если масса материальной кривой распределена по ее длине равномерно, то удельный вес этой кривой будет во всех точках одинаков. Такую материальную кривую мы будем называть *однородной*. В этом же смысле мы будем говорить об однородной материальной фигуре. Прообразом однородной материальной линии может служить тонкая однородная проволока, имеющая *постоянный диаметр*. Аналогично, прообразом однородной материальной фигуры является тонкая однородная пластинка *постоянной толщины*.

Так как материальная линия и материальная фигура обладают массой, а следовательно, и весом, то можно говорить о центре тяжести материальной линии или материальной фигуры. При этом, если материальная линия или фигура является однородной, то положение ее центра тяжести, очевидно, не зависит от ее удельного веса. Поэтому центр тяжести однородной материальной кривой называют *центром тяжести линии*, а центр тяжести однородной материальной фигуры — *центром тяжести площади* (или *центром тяжести этой фигуры*).

Центр давления. С понятием центра тяжести площади приходится встречаться не только в связи с равнодействующей сил веса тонкой пластинки.

Пусть на площадь S действует давление p (рис. 30). Так как силы этого давления параллельны, то их равнодей-

ствующая равна

$$F = pS$$

и приложена в точке C, являющейся центром этих сил. Она называется *центром давления*. Чтобы определить ее положение, заметим, что каждая из рассматриваемых сил равна $p\Delta S$, где ΔS — площадь участка, на который она действует. Но произведение $p\Delta S$ *численно* равно весу участка материальной фигуры, удельный вес которой равен p. Следовательно, рассматриваемые силы имеют такую же величину, как силы веса однородной материальной фигуры S. Из этого заключаем, что точка C совпадает с центром тяжести площади S.

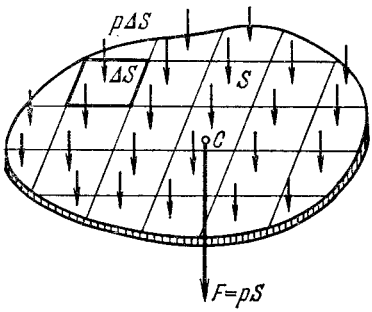

Рис. 30.

Таким образом, *центр равномерного давления на некоторую площадь совпадает с центром тяжести этой площади.* Мы воспользуемся этим результатом при доказательстве первой теоремы Гюльдена.

17. Потенциальная энергия. Будем считать известными следующие положения, относящиеся к понятию потенциальной энергии в поле силы тяжести:

1. *Потенциальная энергия материальной точки равна PH, где P — ее вес, а H — высота.*

2. *Потенциальная энергия материальной системы равна сумме потенциальных энергий всех ее точек.*

3. *Потенциальная энергия твердого тела равна PH_C, где P — вес тела, а H_C — высота его центра тяжести.*

(Первые два из этих положений являются определениями потенциальной энергии материальной точки и материальной системы.)

Так как материальная линия и материальная фигура обладают весом, то положения 2 и 3 распространяются и на них.

18. Центры тяжести некоторых площадей и линий. Чтобы найти центр тяжести, исходя из его определения, надо произвести сложение ряда параллельных сил. Однако в некоторых случаях центр тяжести может быть найден

косвенным путем. Мы сделаем это для нескольких простых фигур и кривых.

1. Прямоугольник. Известно, что если однородное тело имеет плоскость симметрии, то его центр тяжести лежит в этой плоскости. Точно так же, если фигура или кривая имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси. Поэтому центр тяжести прямоугольника находится в его *геометрическом центре* *).

2. Круг. По той же причине центр тяжести круга совпадает с его *центром*.

3. Площадь треугольника. Рассмотрим сначала *трапецию* (рис. 31). Разбив ее на большое число *узких* полос одинаковой ширины, видим, что их центры тяжести можно считать находящимися на отрезке PQ, соединяющем середины оснований AD и BC. Неограниченно уменьшая ширину каждой полосы, приходим к выводу, что центр тяжести площади трапеции лежит на прямой PQ.

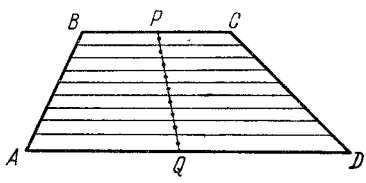

Рис. 31.

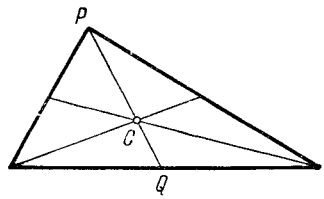

Рис. 32.

Пусть теперь верхнее основание трапеции стремится к нулю. Тогда в пределе трапеция перейдет в треугольник, а прямая PQ—в медиану (рис. 32). Следовательно, центр тяжести треугольника лежит на его медиане. А так как это верно для каждой медианы треугольника, то его центр тяжести C совпадает с *точкой пересечения его медиан*.

4. Круговой сектор. Рассмотрим круговой сектор ABO (рис. 33). Будем считать его материальной фигурой, лежащей в вертикальной плоскости. Представим себе, что мы повернули сектор ABO вокруг центра O на угол δ,

*) Следовательно, для прямоугольника и *центр давления* находится в его геометрическом центре. Этот факт был несколько раз использован в § 2 (например, при доказательстве теоремы Пифагора).

благодаря чему он перешел в положение $A'B'O$. Вычислим, насколько при этом увеличится его потенциальная энергия. Пусть точка C будет центром тяжести площади ABO, а точка C' — центром тяжести площади $A'B'O$. Искомое увеличение потенциальной энергии равно

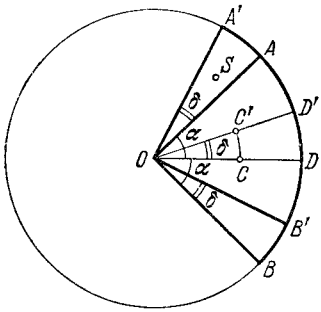

Рис. 33.

$$W_{A'B'O} - W_{ABO} = P_{ABO} H_{C'}, \tag{14}$$

где P_{ABO} — вес сектора, а $H_{C'}$ — высота точки C' над линией OD. Но

$$H_{C'} = OC' \cdot \sin\delta = OC \cdot \sin\delta,$$

$$P_{ABO} = R^2\alpha\gamma,$$

где γ — удельный вес сектора (α измеряется в радианах). Поэтому

$$W_{A'B'O} - W_{ABO} = R^2\alpha\gamma \cdot OC \cdot \sin\delta. \tag{15}$$

С другой стороны,

$$W_{A'B'O} = W_{A'AO} + W_{AB'O}, \qquad W_{ABO} = W_{AB'O} + W_{B'BO}.$$

Из этих равенств получаем

$$W_{A'B'O} - W_{ABO} = W_{A'AO} - W_{B'BO}. \tag{16}$$

Но так как участки $A'AO$, $B'BO$ одинаковы, то разность $W_{A'AO} - W_{B'BO}$ можно рассматривать как увеличение потенциальной энергии сектора $B'BO$ при переходе в положение $A'AO$. Поэтому

$$W_{A'AO} - W_{B'BO} = 2P_{A'AO}H_S, \tag{17}$$

где $P_{A'AO}$ — вес сектора $A'AO$, S — его центр тяжести и H_S — высота точки S над линией OD. Далее, так как

$$P_{A'AO} = \frac{R^2\delta}{2}\gamma \quad (\delta \text{ — в радианах}),$$

$$H_S = OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right),$$

то равенство (17) принимает вид

$$W_{A'AO} - W_{B'BO} = R^2\delta\gamma \cdot OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right),$$

и вместо (16) можно написать

$$W_{A'B'O} - W_{ABO} = R^2\delta\gamma \cdot OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right). \qquad (18)$$

Мы получили для увеличения потенциальной энергии два выражения: (15) и (18). Приравняв их, будем иметь

$$R^2\alpha\gamma \cdot OC \cdot \sin\delta = R^2\delta\gamma \cdot OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right),$$

откуда

$$OC = OS \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha} \frac{\delta}{\sin\delta}. \qquad (19)$$

Полученное равенство позволяет вычислить OC. Действительно, так как равенство (19) верно при любом δ и, в частности, при δ сколь угодно малом, то можно написать

$$OC = \lim_{\delta\to 0}\left[OS \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha} \frac{\delta}{\sin\delta}\right],$$

или

$$OC = \left[\lim_{\delta\to 0} OS\right]\left[\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha}\right]\left[\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\sin\delta}\right].$$

Но

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

и, кроме того, как известно *),

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{\sin\delta} = 1.$$

Поэтому

$$OC = \left(\lim_{\delta\to 0} OS\right) \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (20)$$

---

*) Это равенство имеется во многих руководствах по тригонометрии (его обычно пишут в виде $\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = 1$). Оно выражает тот интуитивно очевидный факт, что при стремлении дуги круга к нулю отношение длины этой дуги к длине стягивающей ее хорды стремится к единице.

Далее, при $\delta \to 0$ дугу $\overset{\frown}{A'A}$ можно заменить стягивающей ее хордой, а сектор $A'AO$ — треугольником $A'AO$. Поэтому при $\delta \to 0$ точку S можно рассматривать как точку пересечения медиан этого треугольника. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{\delta \to 0} OS = \frac{2}{3} R,$$

и равенство 20) принимает вид

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \tag{21}$$

Формула (21) определяет положение центра тяжести кругового сектора.

5. Полукруг. Положив в формуле (21) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим

$$OC = \frac{4R}{3\pi}. \tag{22}$$

Это равенство определяет положение центра тяжести полукруга (рис. 34).

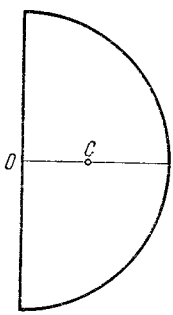

Рис. 34.

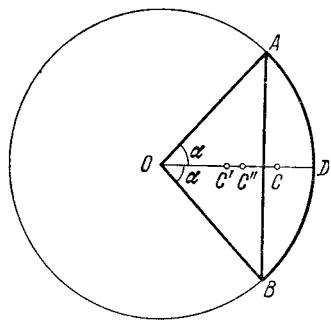

Рис. 35.

6. Круговой сегмент. Пусть однородная материальная фигура имеет форму кругового сектора и расположена в вертикальной плоскости (рис. 35). Дадим ей возможность вращаться вокруг горизонтальной оси O и вычислим момент действующих на нее сил тяжести.

Разобьем сектор $OADB$ на сегмент ADB и треугольник OAB. Обозначив моменты сил тяжести этих фигур через M_{OADB}, M_{ADB}, M_{OAB}, можем написать

$$M_{OADB} = M_{ADB} + M_{OAB}. \tag{23}$$

Но момент любой системы сил и, в частности, сил тяжести, равен моменту равнодействующей этой системы (см. правило I и равенство (8) на стр. 16). Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} M_{OADB} &= \gamma S_{OADB} \cdot OC'', \\ M_{ADB} &= \gamma S_{ADB} \cdot OC, \\ M_{OAB} &= \gamma S_{OAB} \cdot OC', \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где γ — удельный вес, а C, C', C'' — центры тяжести сегмента, треугольника и сектора. Подставив (24) в (23) и сократив на γ, получим

$$S_{OADB} \cdot OC'' = S_{ADB} \cdot OC + S_{OAB} \cdot OC'. \tag{25}$$

Далее имеем:

$$S_{OAB} = R^2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad S_{OADB} = R^2\alpha,$$

$$OC' = \frac{2}{3} R \cos\alpha, \qquad OC'' = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

(последнее равенство — на основании формулы (21), выведенной ранее). Поэтому соотношение (25) принимает вид

$$R^2\alpha \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} = S_{ADB} \cdot OC + R^2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{2}{3} R \cos\alpha,$$

откуда

$$S_{ADB} \cdot OC = \frac{2}{3} R^3 \sin\alpha (1 - \cos^2\alpha) = \frac{2}{3} R^3 \sin^3\alpha,$$

$$OC = \frac{2R^3 \sin^3\alpha}{3S_{ADB}}. \tag{26}$$

Полученное равенство определяет положение центра тяжести сегмента. Так как $R \sin\alpha = \frac{AB}{2}$, то его можно записать в виде

$$OC = \frac{AB^3}{12S_{ADB}},$$

или, короче,

$$OC = \frac{l^3}{12S}, \tag{27}$$

где S — площадь сегмента, а l — его хорда.

7. Дуга окружности. Центр тяжести дуги окружности можно найти так же, как центр тяжести кругового сектора. Обозначим через AB однородную материальную дугу окружности, лежащую в вертикальной плоскости (рис. 36). Если повернуть ее вокруг точки O на угол δ, то она перейдет в положение $A'B'$, а ее центр тяжести C переместится в точку C'. При этом потенциальная энергия дуги возрастет на величину

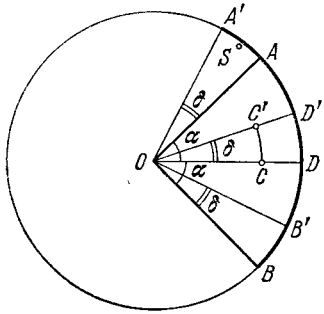

Рис. 36.

$$W_{A'B'} - W_{AB} = P_{AB} H_{C'}, \quad (28)$$

где P_{AB} — вес дуги AB, а $H_{C'}$ — высота точки C' над прямой OD. Но

$$H_{C'} = OC' \cdot \sin\delta = OC \cdot \sin\delta,$$

$$P_{AB} = 2R\,\alpha\gamma,$$

где γ — удельный вес дуги AB. Поэтому равенство (28) принимает вид

$$W_{A'B'} - W_{AB} = 2R\alpha\gamma \cdot OC \cdot \sin\delta. \quad (29)$$

С другой стороны,

$$W_{A'B'} = W_{A'A} + W_{AB'},$$

$$W_{AB} = W_{AB'} + W_{B'B},$$

откуда

$$W_{A'B'} - W_{AB} = W_{A'A} - W_{B'B}. \quad (30)$$

Но так как дуги $A'A$ и $B'B$ одинаковы, то

$$W_{A'A} - W_{B'B} = 2P_{A'A} H_S,$$

где $P_{A'A}$ — вес дуги $A'A$, S — ее центр тяжести и H_S — высота точки S над линией OD. Поэтому равенство (30) можно записать в виде

$$W_{A'B'} - W_{AB} = 2P_{A'A} H_S,$$

и учитывая, что

$$P_{A'A} = R\delta\gamma, \quad H_S = OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right),$$

получаем

$$W_{A'B'} - W_{AB} = 2R\delta\gamma \cdot OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right). \qquad (31)$$

Сравнивая теперь (29) и (31), будем иметь

$$2R\,\alpha\gamma \cdot OC \cdot \sin\delta = 2R\,\delta\gamma \cdot OS \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right),$$

откуда

$$OC = OS \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}{\alpha} \frac{\delta}{\sin\delta}.$$

Далее, перейдя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$OC = (\lim_{\delta \to 0} OS) \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (32)$$

Но при $\delta \to 0$ точка S стремится к A, поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} OS = R.$$

Подставив это значение в (32), окончательно найдем

$$OC = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (33)$$

8. Полуокружность. Если в формулу (33) подставить $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то получим

$$OC = \frac{2R}{\pi}. \qquad (34)$$

Равенство (34) определяет положение центра тяжести полуокружности (рис. 37).

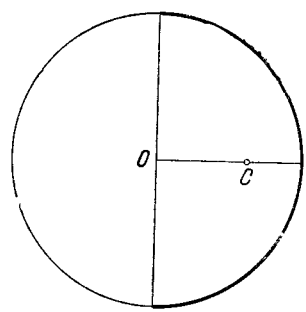

Рис. 37.

Найденные здесь центры тяжести простейших площадей и линий понадобятся нам при вычислении поверхностей и объемов некоторых тел.

19. Объем цилиндроида. Рассмотрим тело, ограниченное цилиндрической поверхностью (не обязательно круговой) и двумя плоскостями, одна из которых перпендикулярна к образующим этой поверхности. Тело подобного рода мы будем называть *цилиндроидом*. Определим его объем.

На рис. 38 изображен цилиндроид $ABDF$, образующие которого вертикальны, а основание горизонтально. Представим себе, что мы подняли его на небольшую высоту h, благодаря чему он перешел в положение $A'B'D'F'$. Вычислим, насколько при этом увеличится его потенциальная энергия.

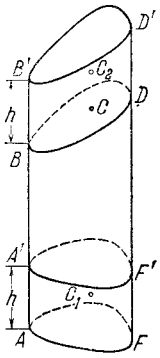

Рис. 38.

Обозначив потенциальную энергию в первоначальном положении через W, а в последующем — через W', будем иметь

$$W' - W = Ph,$$

где P — вес цилиндроида, а h — увеличение высоты его центра тяжести. Очевидно,

$$h = AA' = BB'.$$

Далее, считая этот цилиндроид однородным, можно написать

$$P = V\gamma,$$

где V — объем цилиндроида, а γ — его удельный вес. Следовательно,

$$W' - W = V\gamma h. \tag{35}$$

С другой стороны,

$$W' = W_{A'BDF'} + W_{BB'D'D},$$

$$W = W_{A'BDF'} + W_{AA'F'F},$$

и поэтому

$$W' - W = W_{BB'D'D} - W_{AA'F'F}, \tag{36}$$

т. е. $W' - W$ равно разности потенциальных энергий тел $BB'D'D$ и $AA'F'F$. Пусть v обозначает объем каждого из этих тел (их объемы, очевидно, одинаковы). Тогда будем иметь

$$\left.\begin{aligned} W_{AA'F'F} &= v\gamma H_{C_1}, \\ W_{BB'D'D} &= v\gamma H_{C_2}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где C_1 и C_2 — центры тяжести объемов $AA'F'F$ и $BB'D'D$, а H_{C_1} и H_{C_2} — высоты точек C_1 и C_2 над плоскостью AF. Подставив выражения (37) в равенство (36), получим

$$W' - W = v\gamma (H_{C_2} - H_{C_1}).$$

Далее, так как тело $AA'F'F$ является цилиндром, то $v = Sh$, где S — площадь основания AF. Поэтому

$$W' - W = Sh\gamma (H_{C_2} - H_{C_1}). \tag{38}$$

Таким образом, вычисляя $W' - W$, мы получили выражения (35) и (38). Приравнивая их, будем иметь

$$V\gamma h = Sh\gamma (H_{C_2} - H_{C_1}),$$

откуда

$$V = S (H_{C_2} - H_{C_1}). \tag{39}$$

Далее поступим следующим образом. Так как равенство (39) верно при сколь угодно малом h, а V от h не зависит, то можно написать

$$V = \lim_{h \to 0} [S (H_{C_2} - H_{C_1})] = S (\lim_{h \to 0} H_{C_2} - \lim_{h \to 0} H_{C_1}). \tag{40}$$

Вычислим каждый из двух последних пределов. Прежде всего ясно, что

$$\lim_{h \to 0} H_{C_1} = 0. \tag{41}$$

Далее, если h стремится к нулю, то точки B' и D' стремятся к точкам B и D, а тело $BB'D'D$ все более приближается по форме к пластинке постоянной толщины, построенной на основании BD. Поэтому при $h \to 0$ точка C_2 стремится к центру тяжести однородной материальной фигуры BD, или, иначе говоря, к центру тяжести *площади* BD. Обозначая этот центр через C, получаем

$$\lim_{h \to 0} H_{C_2} = H_C, \tag{42}$$

где H_C — высота точки C над плоскостью AF. Подставив теперь (41) и (42) в (40), найдем

$$V = SH_C. \tag{43}$$

Равенство (43) показывает, что *объем цилиндроида равен площади его основания, умноженной на высоту центра тяжести фигуры, ограничивающей цилиндроид сверху*. Мы в дальнейшем используем это соотношение для вычисления некоторых объемов.

В связи с выводом равенства (43), нужно сделать одно замечание. В этом выводе мы предполагали h выбранным настолько малым, что точки площади $A'F'$ лежат ниже точек площади BD.

Однако возможен цилиндроид, для которого это нельзя сделать ни при каком $h>0$. Так будет в том случае, когда площадь BD имеет общие точки с основанием AF, например, в случае цилиндроида $ABDF$, изображенного на рис. 39. К такому цилиндроиду проведенное доказательство неприменимо, и этот случай нужно рассмотреть отдельно.

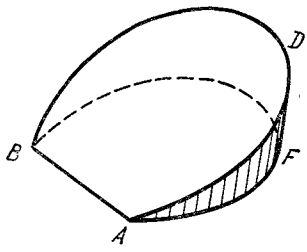

Рис. 39.

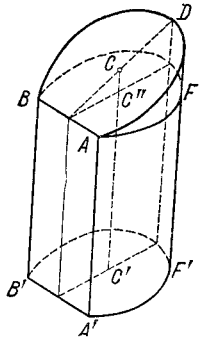

Рис. 40.

Достроим цилиндроид $ABDF$ до цилиндроида $A'B'BDF'$ (рис. 40). Тогда будем иметь

$$V_{ABDF}=V_{A'B'BDF'}-V_{A'B'BFF'}=S\cdot CC'-S\cdot C'C''=S\cdot CC'', \quad (44)$$

где $S=S_{ABF}=S_{A'B'F'}$, а C—центр тяжести площади ABD. Но CC'' есть высота точки C над плоскостью ABF. Следовательно, равенство (44) можно записать в виде

$$V_{ABDF}=SH_C,$$

где H_C обозначает высоту центра тяжести C над основанием цилиндроида $ABDF$. Таким образом, соотношение (43) справедливо и в случае цилиндроида, показанного на рис. 39.

Чтобы вычислить объем цилиндроида с помощью равенства (43), нужно знать центр тяжести его верхнего основания. В связи с этим может оказаться полезной следующая теорема:

Прямая, соединяющая центры тяжести оснований цилиндроида, параллельна его образующим.

Доказательство. Обозначим центры тяжести оснований цилиндроида через C и C' и предположим, что прямая CC' не параллельна его образующим. Тогда этот цилиндроид можно будет расположить так, чтобы его образующие были горизонтальны, а прямая CC'—наклонной (цилиндроид $ABDF$ на рис. 41). Сделав это, будем иметь

$$H_C\neq H_{C'}, \quad (45)$$

где H_C и $H_{C'}$ — высоты точек C и C' (отсчитываемые от какого-нибудь горизонтального уровня).

Сместим теперь этот цилиндроид на расстояние l вдоль его образующих. Тогда он перейдет в положение $A'B'D'F'$, и так как каждая его частица сместится при этом в *горизонтальном* направлении, то потенциальная энергия цилиндроида останется неизменной. Таким образом,

$$W_{A'B'D'F'} = W_{ABDF}. \qquad (46)$$

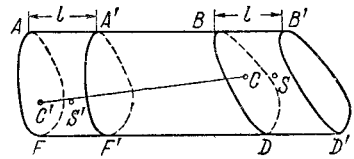

Рис. 41.

Но

$$W_{A'B'D'F'} = W_{A'BDF'} + W_{BB'D'D},$$

$$W_{ABDF} = W_{A'BDF'} + W_{AA'F'F},$$

и поэтому равенство (46) принимает вид

$$W_{BB'D'D} = W_{AA'F'F}. \qquad (47)$$

Далее

$$W_{BB'D'D} = P_{BB'D'D}\ H_S, \qquad W_{AA'F'F} = P_{AA'F'F}\, H_{S'},$$

где S и S' — центры тяжести тел $BB'D'D$ и $AA'F'F$. Подставив эти выражения в (47) и учтя, что $P_{BB'D'D} = P_{AA'F'F}$, получим

$$H_S = H_{S'}. \qquad (48)$$

Пусть теперь l будет очень мало́. Тогда тело $BB'D'D$ можно будет рассматривать как однородную материальную фигуру BD, а центр тяжести S можно будет отождествить с центром тяжести C. Поэтому если l стремится к нулю, то точка S стремится к точке C, и, следовательно,

$$\lim_{l \to 0} H_S = H_C. \qquad (49)$$

Аналогично получим

$$\lim_{l \to 0} H_{S'} = H_{C'}, \qquad (50)$$

и из равенств (48), (49), (50) заключаем, что

$$H_C = H_{C'}.$$

Но так как полученный результат противоречит соотношению (45), то предположение о том, что прямая CC' не параллельна образующим цилиндроида, неверно.

Доказанная теорема показывает, что центр тяжести верхнего основания цилиндроида лежит точно над центром тяжести нижнего основания *).

Рассмотрим теперь два примера вычисления объема цилиндроида.

1. Вычислим объем трехгранного цилиндроида, изображенного на рис. 42. Пусть C и C' обозначают центры тяжести его оснований. Тогда согласно равенству (43) будем иметь

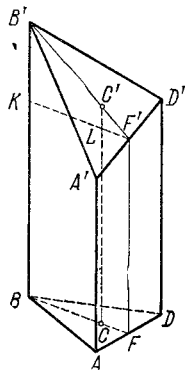

Рис. 42.

$$V = S \cdot CC', \tag{51}$$

где S — площадь треугольника ABD. Далее, так как центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан, то

$$C'F' = \frac{1}{3} B'F',$$

и, следовательно,

$$LC' = \frac{1}{3} KB'.$$

Поэтому

$$CC' = FF' + \frac{1}{3}(BB' - FF') = \frac{2\,FF' + BB'}{3},$$

и, учитывая, что

$$FF' = \frac{1}{2}(AA' + DD'),$$

получим

$$CC' = \frac{AA' + BB' + DD'}{3}.$$

Подставив это выражение в (51), будем иметь

$$V = S\,\frac{AA' + BB' + DD'}{3}. \tag{52}$$

Таков объем рассматриваемого цилиндроида. Обозначив высоты AA', BB', DD' через H_1, H_2, H_3, можно написать

$$V = S\,\frac{H_1 + H_2 + H_3}{3}. \tag{53}$$

*) Приведенное доказательство неприменимо к цилиндроиду, показанному на рис. 39 Однако из рис 40 видно, что рассматриваемая теорема верна и для такого цилиндроида

Второй множитель этого произведения можно рассматривать как среднюю высоту трехгранного цилиндроида.

2. Рассмотрим цилиндроид, получающийся из кругового цилиндра посредством сечения плоскостью, проходящей через диаметр нижнего основания (рис. 43). Его объем равен

$$V=\frac{\pi R^2}{2}\cdot CS=\frac{\pi R^2}{2}\cdot OC\cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

где C—центр тяжести полукруга, лежащего в основании цилиндроида. Но, как было найдено ранее,

$$OC=\frac{4R}{3\pi}$$

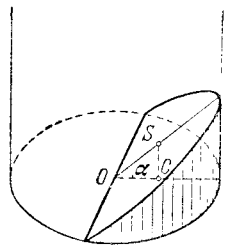

Рис. 43.

(см. формулу (22) и рис. 34). Следовательно,

$$V=\frac{\pi R^2}{2}\frac{4R}{3\pi}\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha. \qquad (54)$$

Интересной особенностью полученного результата является то, что в нем *отсутствует число* π.

20. Объем пирамиды. Рассмотрим треугольную пирамиду, у которой *одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания* (рис. 44). Так как она является частным

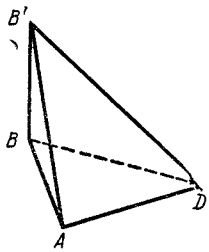

Рис. 44.

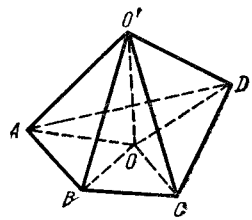

Рис. 45.

случаем трехгранного цилиндроида, изображенного на рис. 42, то ее объем можно найти по формуле (53). Положив в этой формуле $H_1=H_3=0$, $H_2=H$, получим

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

Пусть теперь пирамида будет произвольной (рис. 45). Тогда ее можно будет разбить на несколько треугольных

пирамид, подобных изображенной на рис. 44. Например, пирамида, показанная на рис. 45, разбивается на четыре такие пирамиды, имеющие общее ребро OO'. Вычисляя объем каждой из них, получаем

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 H,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} S_2 H,$$

$$V_3 = \frac{1}{3} S_3 H,$$

$$V_4 = \frac{1}{3} S_4 H,$$

откуда

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) H.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} SH, \tag{55}$$

где S — площадь основания $ABCD$. Формула (55) дает известное выражение для объема пирамиды *).

21. Объем тела вращения (первая теорема Гюльдена). Рассмотрим тело, получающееся от вращения плоской фигуры Q вокруг оси, лежащей в ее плоскости (на рис. 46 показана половина этого тела). Ось OO' мы в дальнейшем будем считать вертикальной. Изготовим трубу, внутренняя полость которой имеет форму этого тела, и соединим ее с трубой, имеющей форму цилиндра (на рис. 47 показан вид сверху; ось OO' изображается здесь в виде точки O). Поместим в цилиндрическую часть полученной трубы поршень $ABDE$, а в круговую — поршень $KLMN$, и зальем полость между поршнями несжимаемой жидкостью. Пусть теперь на поршень $ABDE$ действует сила F, заставляющая его перемещаться в положение $A'B'D'E'$. Вычислим работу, совершаемую этой силой.

---

*) Пирамиду, изображенную на рис. 45, мы разбивали на четыре пирамиды, подобные показанной на рис. 44. Однако если пирамида будет «очень косой», то точка O окажется вне основания $ABCD$ и это сделать не удастся. В этом случае придется рассматривать не «*арифметическую* сумму» нескольких пирамид, а «*алгебраическую*» (т. е. объемы некоторых пирамид брать со знаком минус).

Так как путь, проходимый точкой приложения силы F, равен BB', то искомая работа равна

$$A = F \cdot BB' = F \cdot AA'. \tag{56}$$

Но сила F уравновешивается давлением жидкости на стенку AD (движение поршня предполагается равномерным). Поэтому

$$F = pS_{AD}, \tag{57}$$

где p — давление жидкости, а S_{AD} — площадь торца AD.

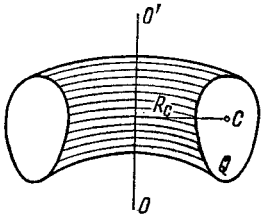

Рис. 46.

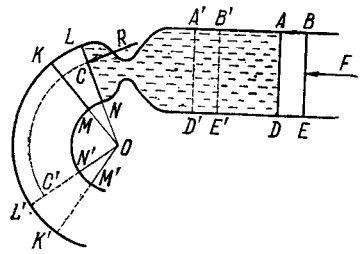

Рис. 47.

Подставляя это выражение в (56), получаем

$$A = pS_{AD} \cdot AA', \tag{58}$$

и так как $S_{AD} \cdot AA'$ представляет объем участка $A'AD'D$, то

$$A = pV_{A'AD'D}. \tag{59}$$

Таково выражение для работы, совершаемой силой F.

Вычислим теперь эту работу иначе. Будем рассматривать ее как работу силы R, с которой жидкость давит на поршень $KLMN$. Тогда получим

$$A = R \cdot \overset{\frown}{CC'},$$

где C — точка приложения силы R, а $\overset{\frown}{CC'}$ — дуга, описываемая этой точкой при движении поршня. Но

$$R = pS_{LN},$$

где S_{LN} — площадь торца LN. Следовательно,

$$A = pS_{LN} \cdot \overset{\frown}{CC'}. \tag{60}$$

Сравнив выражения (59) и (60), будем иметь

$$V_{A'AD'D} = S_{LN} \cdot \overset{\smile}{CC'}. \tag{61}$$

Но так как объем, описываемый поршнем $ABDE$, равен объему, описываемому поршнем $KLMN$, то равенство (61) можно записать в виде

$$V_{L'LN'N} = S_{LN} \cdot \overset{\smile}{CC'}. \tag{62}$$

Формула (62) дает выражение для объема, описанного торцем LN. Учитывая, что S_{LN} есть площадь фигуры Q (рис. 46), а $V_{L'LN'N}$ — объем, полученный от вращения той же фигуры, мы опустим индексы LN и $L'LN'N$. Тогда равенство (62) примет вид

$$V = S \cdot \overset{\smile}{CC'}. \tag{63}$$

Формула (63) показывает, что объем тела, получающегося при вращении фигуры Q, равен площади этой фигуры, умноженной на длину дуги, описываемой точкой C. Но точка C имеет простой геометрический смысл. Действительно, так как она является *центром давления* на торец LN, а во всех точках этого торца давление одинаково, то точка C совпадает с центром тяжести площади Q. Следовательно, дуга $\overset{\smile}{CC'}$ есть дуга, описываемая центром тяжести этой площади.

Применим равенство (63) к телу, изображенному на рис. 46 (половина тела вращения). В этом случае дуга $\overset{\smile}{CC'}$ равна πR_C, где R_C — расстояние точки C от оси вращения. Следовательно, объем рассматриваемого тела равен

$$S\pi R_C.$$

Но так как этот объем вдвое меньше объема полного тела вращения, то можно написать

$$\frac{V}{2} = S\pi R_C,$$

откуда

$$V = 2\pi R_C S. \tag{64}$$

Равенство (64) выражает теорему:

Объем тела вращения равен площади фигуры, из которой оно получено, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой площади.

Доказанная теорема известна под названием первой теоремы Гюльдена.

Другое доказательство первой теоремы Гюльдена. Пусть пластинка Q имеет возможность вращаться вокруг *горизонтальной* оси z (на рис. 48 изображен вид сверху). Будем считать, что она имеет вес P, но не имеет толщины, т. е. является *материальной фигурой*. Плоскость пластинки будем считать горизонтальной и проходящей через ось z, а стержни *1* и *2* — невесомыми.

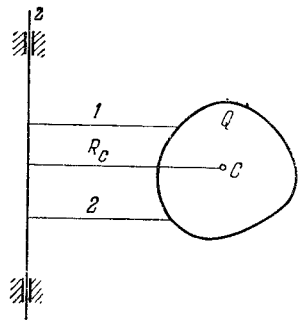

Рис. 48.

Вес пластинки создает некоторый вращающий момент относительно оси z. Он равен

$$M_z(P) = PR_C, \qquad (65)$$

где R_C — расстояние от центра тяжести площади Q до оси z. Но

$$P = \gamma S, \qquad (66)$$

где S — площадь фигуры Q, а γ — ее удельный вес. (Мы считаем фигуру однородной.) Следовательно,

$$M_z(P) = \gamma S R_C. \qquad (67)$$

Произведение SR_C называется *статическим моментом площади* S *относительно оси* z. Мы будем его обозначать через $M_z(S)$:

$$M_z(S) = SR_C. \qquad (68)$$

Сравнивая равенства (65) и (68), видим, что формула (68) получается из формулы (65) посредством замены P на S. Поэтому на статический момент площади можно смотреть как на момент, «создаваемый площадью» рассматриваемой фигуры. Кроме того, из равенств (68) и (67) видно, что статический момент площади можно рассматривать как момент, создаваемый весом фигуры, у которой $\gamma = 1$.

Из равенств (67) и (68) получаем

$$M_z(P) = \gamma M_z(S). \qquad (69)$$

Это соотношение связывает момент веса с моментом площади.

Разобьем пластинку на несколько участков. Тогда можно будет написать

$$M_z(P) = M_z(P_1) + M_z(P_2) + \ldots + M_z(P_n), \qquad (70)$$

где P_1, P_2, ..., P_n — веса этих участков. (Равенство (70) получено на основании правила: момент равнодействующей равен сумме моментов всех сил системы.) Записав здесь момент каждой силы в виде (69), получим

$$\gamma M_z(S) = \gamma M_z(S_1) + \gamma M_z(S_2) + \ldots + \gamma M_z(S_n).$$

Наконец, сократив это равенство на γ (или положив $\gamma = 1$), приходим к правилу:

Если площадь S составлена из площадей S_1, S_2, ..., S_n, то

$$M_z(S) = M_z(S_1) + M_z(S_2) + \ldots + M_z(S_n). \tag{71}$$

Мы воспользуемся этим равенством для доказательства теоремы Гюльдена.

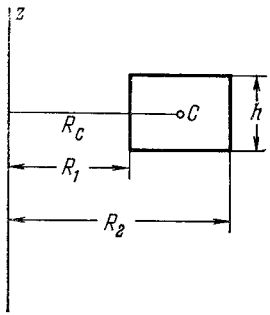

Рис. 49.

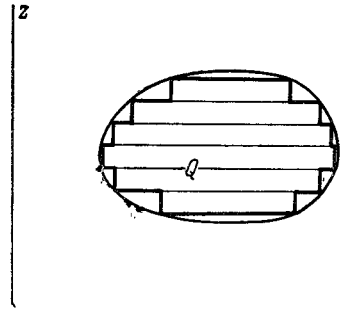

Рис. 50.

Рассмотрим прямоугольник, вращающийся вокруг оси z, параллельной одной из его сторон (рис. 49). Объем получающегося при этом тела вращения равен

$$V = \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h,$$

или

$$V = 2\pi (R_2 - R_1) h \frac{R_2 + R_1}{2}. \tag{72}$$

Но

$$(R_2 - R_1) h = S,$$

$$\frac{R_2 + R_1}{2} = R_C,$$

где S — площадь прямоугольника, а C — его центр тяжести. Следовательно,

$$V = 2\pi S R_C,$$

т. е.

$$V = 2\pi M_z(S), \tag{73}$$

где $M_z(S)$ — момент площади прямоугольника относительно оси вращения.

Заменим теперь этот прямоугольник произвольной фигурой Q (рис. 50). Разобьем ее на большое число узких полос и заменим каждую из них прямоугольником, построенным на одном из оснований полосы. Обозначим число полос через n и станем неограниченно увеличивать это число. Тогда будем иметь

$$V = \lim_{n \to \infty} (V_1 + V_2 + \ldots + V_n),$$

где V — объем тела, получающегося от вращения фигуры Q, а $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — объемы тел, получающихся от вращения отдельных прямоугольников. Но согласно (73)

$$V_1 = 2\pi M_z(S_1),$$
$$V_2 = 2\pi M_z(S_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n = 2\pi M_z(S_n).$$

Следовательно,

$$V = 2\pi \lim_{n \to \infty} [M_z(S_1) + M_z(S_2) + \ldots + M_z(S_n)], \tag{74}$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — площади прямоугольников. Но в силу (71) сумма, стоящая в квадратных скобках, равна статическому моменту площади, ограниченной жирными линиями (рис. 50). А так как при $n \to \infty$ фигура, ограниченная жирными линиями, переходит в фигуру Q, то

$$\lim_{n \to \infty} [M_z(S_1) + M_z(S_2) + \ldots + M_z(S_n)] = M_z(S),$$

где $M_z(S)$ — статический момент площади, ограниченной фигурой Q. Поэтому равенство (74) принимает вид

$$V = 2\pi M_z(S). \tag{75}$$

Формула (75) показывает, что объем тела, получающегося от вращения плоской фигуры, равен статическому моменту ее площади, умноженному на 2π. Подставив теперь сюда выражение (68), получим

$$V = 2\pi R_C S,$$

что и доказывает теорему Гюльдена.

22. Объем шара. Шар можно получить посредством вращения полукруга вокруг диаметра. Поэтому объем шара равен

$$V = \frac{\pi R^2}{2} 2\pi \cdot OC,$$

где C — центр тяжести полукруга (см. рис. 34). Но согласно формуле (22)

$$OC = \frac{4R}{3\pi},$$

и, следовательно,

$$V = \frac{\pi R^2}{2} 2\pi \frac{4R}{3\pi},$$

т. е.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

23. Объемы некоторых других тел вращения. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение первой теоремы Гюльдена.

1. Круговой цилиндр. Из рис. 51 видно, что объем кругового цилиндра равен

$$V = 2\pi R_C S = 2\pi \frac{R}{2} RH = \pi R^2 H,$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

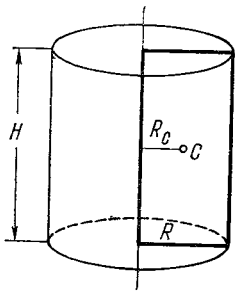

Рис. 51.

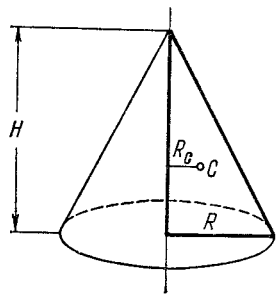

Рис. 52.

2. Конус. Круглый конус можно рассматривать как тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета (рис. 52). Учитывая, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан и, следовательно, R_C равно $\frac{R}{3}$, получаем известное выражение для объема конуса:

$$V = 2\pi R_C S = 2\pi \frac{R}{3} \frac{RH}{2} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

3. Тор. Тором называется тело, получающееся от вращения круга около оси, лежащей с ним в одной плоскости (рис. 53). Согласно теореме Гюльдена объем тора равен

$$V = 2\pi R_C S = 2\pi R \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

4. Пусть круговой сегмент вращается вокруг диаметра, параллельного его хорде (рис. 54). Объем получающегося кольцеобразного тела равен

$$V = 2\pi \cdot OC \cdot S,$$

где OC — расстояние от центра круга до центра тяжести

сегмента. Но согласно (27)

$$OC = \frac{l^3}{12S},$$

где l — хорда сегмента. Поэтому

$$V = \frac{\pi l^3}{6}.$$

Интересно, что найденный объем зависит *только* от l.

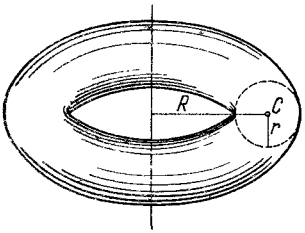

Рис. 53.

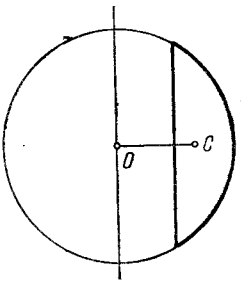

Рис. 54.

Зная центр тяжести сегмента, можно найти также объем тела, изображенного на рис. 55 (получающегося от вращения сегмента вокруг его хорды). Мы не будем проводить этих выкладок.

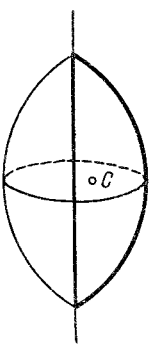

Рис. 55.

5. В некоторых случаях теорема Гюльдена позволяет значительно сократить вычисления. Пусть, например, квадрат $ABDE$ вращается вокруг оси OO' (рис. 56). Объем получающегося тела вращения можно найти, вычисляя объемы двух усеченных конусов. Однако это сравнительно сложно, в то время как с помощью теоремы Гюльдена сразу получаем

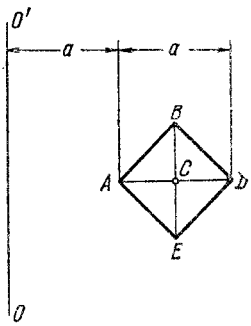

Рис. 56.

$$V = 2\pi R_C S = 2\pi\left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^3,$$

где a — диагональ квадрата.

В качестве другого примера того же рода рассмотрим следующую задачу. Треугольник вращается один раз вокруг оси z_1, а второй раз — вокруг параллельной ей оси z_2 (рис. 57). Как относятся объемы полученных тел вращения?

Теорема Гюльдена дает возможность решить эту задачу, не производя никаких выкладок. Действительно, так как точка пересечения медиан рассматриваемого треугольника вдвое ближе к оси z_1, чем к оси z_2, то $V_1 : V_2 = 1 : 2$.

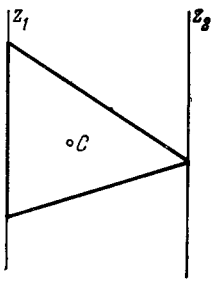

Рис. 57.

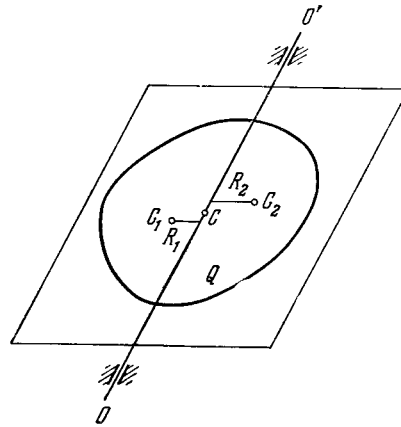

Рис. 58.

6. Пусть однородная материальная фигура Q лежит в горизонтальной плоскости (рис. 58). Если дать ей возможность вращаться вокруг горизонтальной оси OO', проходящей через ее центр тяжести, то она, очевидно, будет оставаться в равновесии. Следовательно,

$$\gamma S_1 R_1 = \gamma S_2 R_2,$$

где γ — удельный вес фигуры, S_1 и S_2 — площади частей, на которые ее разбивает прямая OO', а R_1 и R_2 — расстояния центров тяжести этих частей от указанной прямой. Умножив написанное равенство на $2\pi\gamma$, будем иметь

$$2\pi R_1 S_1 = 2\pi R_2 S_2. \qquad (76)$$

Равенство (76) показывает, что объемы тел, получающихся при вращении левой и правой половины этой фигуры вокруг оси OO', одинаковы.

Полученный результат верен для любой плоской фигуры и любой прямой, проходящей через ее центр тяжести.

Пусть, например, треугольник ABC вращается вокруг медианы BD (рис. 59). Тогда объемы тел, описанных треугольниками ABD и BDC, будут одинаковы.

7. В примерах, которые мы до сих пор рассматривали, теорема Гюльдена применялась к вычислению объемов. Однако ее можно использовать и иначе: зная объем тела вращения, найти центр тяжести фигуры, из которой это тело получено. Рассмотрим два примера.

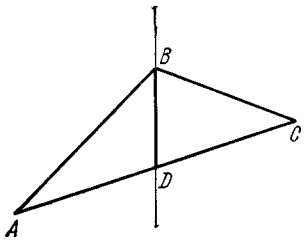

Рис. 59.

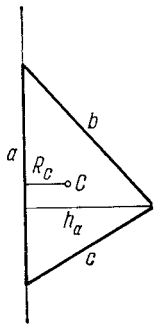

Рис. 60.

1. Пусть треугольник со сторонами a, b, c вращается вокруг стороны a (рис. 60). Объем получающегося тела вращения легко найти, складывая объемы двух конусов. Таким путем получим

$$V = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a,$$

где h_a — высота, опущенная на сторону a. Применяя теперь к этому треугольнику теорему Гюльдена, будем иметь

$$\frac{1}{3}\pi h_a^2 a = 2\pi R_C \frac{1}{2} a h_a,$$

$$R_C = \frac{1}{3} h_a.$$

Таким образом, центр тяжести этого треугольника отстоит от стороны a на расстояние $\frac{1}{3} h_a$. Рассуждая точно так же, придем к выводу, что он отстоит от сторон b и c на расстояния $\frac{1}{3} h_b$ и $\frac{1}{3} h_c$. Но этим свойством обладает лишь одна точка треугольника — точка пересечения его медиан.

2. В качестве второго примера найдем центр тяжести полукруга. Применив теорему Гюльдена к шару, получим

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi \cdot OC \cdot \frac{\pi R^2}{2},$$

где O—центр круга, а C—центр тяжести полукруга. Следовательно,

$$OC = \frac{4R}{3\pi}. \tag{77}$$

Формула (77) определяет положение центра тяжести полукруга.

Разумеется, выводя таким путем формулу (77), мы уже не можем пользоваться ею для вычисления объема шара, так как это означало бы допустить «порочный круг». Однако мы можем использовать ее при вычислении объемов некоторых других тел, например, тела, изображенного на рис. 43 (см. равенство (54) на стр. 37). Таким образом, теорема Гюльдена позволяет вычислить объем этого тела, исходя из формулы для объема шара. Можно привести и другие примеры подобного рода. Пусть, например, полукруг вращается вокруг оси z (рис. 61). Объем получающегося тела вращения можно найти, вычисляя с помощью формулы (77) разность $R_C = R - OC$. Следовательно, зная объем шара, мы можем вычислить и объем рассматриваемого тела вращения. (Заметим, что это тело не является «суммой» или «разностью» нескольких тел, объемы которых известны. Поэтому непосредственное вычисление его объема оказывается затруднительным.)

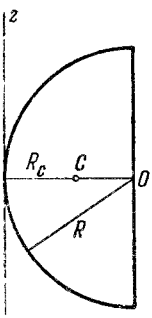

Рис. 61.

24. Поверхность тела вращения (вторая теорема Гюльдена). Введем сначала два новых понятия.

1. Касательная. Возьмем на кривой AB точки M и M' и проведем секущую MM' (рис. 62). Зафиксируем теперь точку M, а точку M' будем неограниченно приближать к M. Тогда секущая MM' начнет поворачиваться и в пределе займет положение MP. Прямая MP называется *касательной к кривой AB в точке M.*

2. Нормаль. Возьмем на плоской кривой точку M (рис. 63). Проведем через нее касательную MP и прямую MN, перпендикулярную к MP. Линия MN называется *нор-*

малью к данной кривой в точке M. Ее можно рассматривать как перпендикуляр к кривой *AB*.

Рассмотрим теперь дугу *AB* плоской кривой (рис. 64). Возьмем на ней произвольную точку *C*, проведем через эту точку нормаль и отложим вдоль нормали небольшой

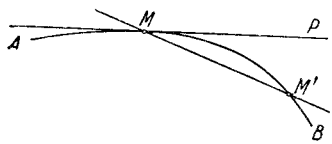

Рис. 62.

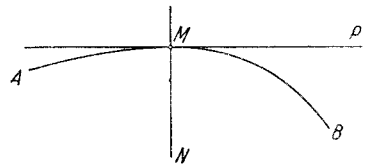

Рис. 63.

отрезок *CC'* заданной длины *d*. Отложив такие отрезки от каждой точки дуги *AB*, мы получим кривую *A'B'*, являющуюся геометрическим местом концов построенных отрезков. Можно доказать, что каждая из прямых *CC'* является нормалью не только к кривой *AB*, но и к кривой *A'B'*. Поэтому расстояние *CC'* можно рассматривать как

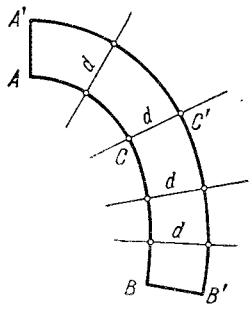

Рис. 64.

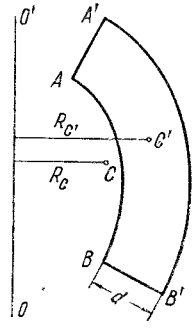

Рис. 65.

ширину полосы *AA'B'B*. Так как эта ширина во всех точках одинакова, то мы будем говорить, что полоса *AA'B'B* имеет *постоянную ширину*.

Пусть узкая полоса *AA'B'B* имеет постоянную ширину *d* и вращается вокруг оси *OO'* (рис. 65). Обозначив через *V* объем получающегося при этом тела, можем на основании

первой теоремы Гюльдена написать

$$V = 2\pi R_{C'} S_{AA'B'B}, \quad \frac{V}{d} = 2\pi R_{C'} \frac{S_{AA'B'B}}{d},$$

где C' — центр тяжести площади $AA'B'B$. Зафиксируем теперь дугу AB и станем уменьшать d. Тогда будем иметь

$$\lim_{d \to 0} \frac{V}{d} = 2\pi \left(\lim_{d \to 0} R_{C'} \right) \left(\lim_{d \to 0} \frac{S_{AA'B'B}}{d} \right). \tag{78}$$

Но если d мало, то имеют место приближенные равенства

$$V \approx S_{AB} d, \quad S_{AA'B'B} \approx l_{AB} d,$$

где S_{AB} — площадь поверхности, образованной вращением дуги AB, а l_{AB} — длина этой дуги. Из этих соотношений заключаем, что

$$\lim_{d \to 0} \frac{V}{d} = S_{AB}, \quad \lim_{d \to 0} \frac{S_{AA'B'B}}{d} = l_{AB},$$

и равенство (78) принимает вид

$$S_{AB} = 2\pi \left(\lim_{d \to 0} R_{C'} \right) l_{AB}. \tag{79}$$

Далее, так как полоса $AA'B'B$ имеет постоянную ширину, то при очень малых d ее центр тяжести будет близок к центру тяжести дуги AB. Поэтому в пределе получим

$$\lim_{d \to 0} R_{C'} = R_C, \tag{80}$$

где C — центр тяжести дуги AB. Подставляя (80) в (79), получим

$$S_{AB} = 2\pi R_C l_{AB}.$$

или, опуская индекс AB,

$$S = 2\pi R_C l. \tag{81}$$

Равенство (81) выражает теорему:

Поверхность тела вращения равна длине кривой, из которой образована эта поверхность, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой кривой.

Доказанная теорема называется второй теоремой Гюльдена.

Другое доказательство второй теоремы Гюльдена. Подобно тому как в пункте 21 было введено понятие статического момента площади, можно ввести понятие *статического момента длины*.

Рассмотрим материальную плоскую кривую L (рис. 66). Расположим ее в горизонтальной плоскости (на рис. 66 — плоскость чертежа) и соединим невесомыми стержнями *1* и *2* с горизонтальной осью z, лежащей в той же плоскости. Таким путем мы даем ей возможность вращаться вокруг этой оси.

Сила веса этой кривой создает некоторый момент относительно оси z. Он равен

$$M_z(P) = PR_C,$$

где P — вес кривой L, а R_C — расстояние от ее центра тяжести до оси z. Но

$$P = \gamma l,$$

где γ — удельный вес кривой L, а l — ее длина. Следовательно,

$$M_z(P) = \gamma l R_C.$$

Произведение lR_C называется *статическим моментом длины l относительно оси z*. Обозначая его через $M_z(l)$, можем написать:

$$M_z(l) = lR_C. \qquad (82)$$

Статический момент длины можно

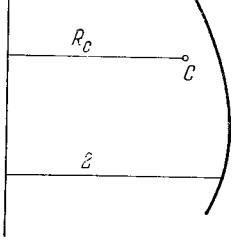

Рис. 66.

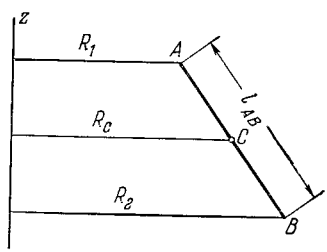

Рис. 67.

рассматривать как момент, создаваемый весом кривой, у которой $\gamma = 1$.

Если разбить длину l на участки l_1, l_2, ..., l_n, то, очевидно, будем иметь

$$M_z(l) = M_z(l_1) + M_z(l_2) + \ldots + M_z(l_n). \qquad (83)$$

Равенство (83) позволяет легко доказать вторую теорему Гюльдена.

Пусть отрезок AB вращается вокруг оси z, лежащей с ним в одной плоскости (рис. 67). Площадь получающейся при этом поверхности равна

$$S_{AB} = \pi (R_1 + R_2) l_{AB}$$

(боковая поверхность усеченного конуса). Записывая ее в виде

$$S_{AB} = 2\pi l_{AB} \frac{R_1 + R_2}{2},$$

и учитывая, что

$$\frac{R_1+R_2}{2}=R_C,$$

получаем

$$S_{AB}=2\pi l_{AB}R_C,$$

т. е.

$$S_{AB}=2\pi M_z(l_{AB}), \tag{84}$$

где $M_z(l_{AB})$—статический момент отрезка AB относительно оси вращения.

Заменим теперь отрезок AB произвольной плоской кривой (рис. 68). Впишем в нее ломаную, состоящую из n звеньев, и будем предполагать, что n стремится к бесконечности, а длины звеньев—к нулю. Тогда получим

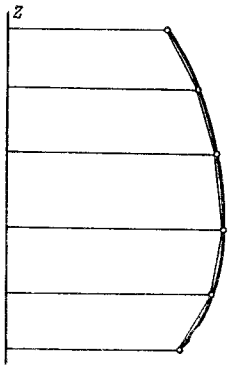

Рис. 68.

$$S=\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\ldots+S_n), \tag{85}$$

где S, S_1, S_2, ..., S_n—площади поверхностей, получающихся от вращения данной кривой и звеньев ломаной. Но площади S_1, S_2, ..., S_n можно представить в виде (84). Поэтому (85) принимает вид

$$S=2\pi\lim_{n\to\infty}[M_z(l_1)+M_z(l_2)+\ldots+M_z(l_n)],$$

т. е.

$$S=2\pi M_z(l), \tag{86}$$

где $M_z(l)=\lim_{n\to\infty}[M_z(l_1)+\ldots+M_z(l_n)]$—статический момент данной кривой относительно оси z. Учитывая теперь (82), можем записать (86) в виде

$$S=2\pi R_C l.$$

Полученное равенство выражает вторую теорему Гюльдена

25. Поверхность шара. Пусть полуокружность вращается вокруг диаметра. Пользуясь теоремой Гюльдена, получаем

$$S=2\pi\cdot OC\cdot\pi R,$$

где O—центр круга, а C—центр тяжести полуокружности (рис. 37). Далее, так как согласно (34)

$$OC=\frac{2R}{\pi},$$

то

$$S=2\pi\frac{2R}{\pi}\pi R.$$

Следовательно, поверхность шара равна

$$S = 4\pi R^2.$$

26. Поверхности некоторых других тел вращения. Пользуясь теоремой Гюльдена, можно вычислить площадь ряда поверхностей вращения. Рассмотрим несколько примеров.

1. Тор. Так как центр тяжести окружности совпадает с ее геометрическим центром, то поверхность тора (рис. 53) равна

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

2. Шаровой пояс. Эта поверхность получается в результате вращения дуги AB вокруг диаметра PQ (рис. 69). Согласно теореме Гюльдена получаем

$$S = 2\pi \cdot C'C \cdot \overset{\smile}{AB},$$

где C—центр тяжести дуги AB. Далее, как видно из чертежа,

$$C'C = OC \cdot \sin\beta, \quad \overset{\smile}{AB} = 2R\alpha.$$

Поэтому

$$S = 2\pi \cdot OC \cdot \sin\beta \cdot 2R\alpha.$$

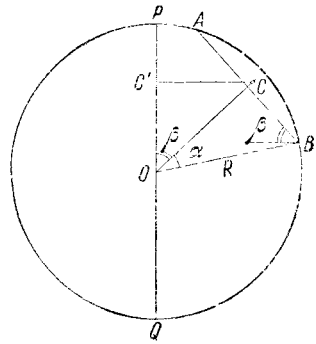

Рис. 69.

Но согласно (33) $OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Следовательно,

$$S = 2\pi R \frac{\sin\alpha}{\alpha} \sin\beta \cdot 2R\alpha = 2\pi R \cdot 2R \sin\alpha \sin\beta,$$

или, учитывая, что $2R\sin\alpha = AB$,

$$S = 2\pi R \cdot AB \sin\beta.$$

Второй множитель этого произведения, как нетрудно видеть, равен *высоте* шарового пояса (проекция хорды AB на диаметр PQ). Обозначив эту высоту через H, окончательно получим

$$S = 2\pi RH.$$

3. Пусть квадрат, изображенный на рис. 56, вращается вокруг оси OO'. Поверхность образующегося при этом тела равна

$$S = 2\pi R_C l = 2\pi\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot 4\frac{a\sqrt{2}}{2} = 6\pi\sqrt{2}\,a^2.$$

4. Теорема Гюльдена позволяет определять центры тяжести некоторых линий. Например, зная поверхность шара, можно найти центр тяжести полуокружности. Точно так же, исходя из известной формулы для поверхности шарового пояса, легко найти центр тяжести круговой дуги. После этого можно вычислить поверхность, образованную вращением этой дуги вокруг произвольной оси. Таким путем можно, в частности, найти поверхность тела, изображенного на рис. 55.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в этой книжке доказательства могут вызвать некоторые вопросы.

Прежде всего возникает вопрос: нет ли в них порочного круга? Например, доказывая теорему Пифагора, мы пользовались известным правилом моментов. Но в механике его выводят с помощью некоторых соображений физического, а также *геометрического* характера. В связи с этим могут спросить: не используется ли в этом выводе сама теорема Пифагора? Однако, как показывает анализ, обычный вывод правила моментов основан только на аксиомах статики и на некоторых теоремах о подобии треугольников. Следовательно, порочного круга здесь нет. То же самое нужно сказать и о других физических правилах, которыми мы пользовались в этой книжке: ни одно из них не опирается на те теоремы, которые с их помощью доказывались.

Далее, второй вопрос: в какой степени допустимы те идеализации, которыми мы иногда пользовались? Например, в третьем параграфе мы исходили из представления о линии, имеющей вес, но не имеющей толщины, что, конечно, нереально. На это можно ответить, что подобная идеализация ничем, в сущности, не отличается от тех, которыми пользуются в геометрии, когда говорят о точке «без длины и ширины» или о линии «без толщины». Линия, имеющая вес, но не имеющая толщины, является абстракцией такого же рода, возникшей из представления о тонком криволинейном стержне, вес которого существен, а толщина настолько невелика, что ею можно пренебречь. В этом отношении можно было бы пойти дальше и приписать линии не вес, а какое-нибудь другое физическое качество, скажем, *гибкость* или *упругость*. В этом смысле можно было бы говорить, например, о линии, не имеющей толщины, но об-

является тонкая резиновая нить *).

Наконец, третий вопрос: вправе ли мы пользоваться такими негеометрическими аксиомами, как правило параллелограмма сил или постулат о невозможности вечного двигателя? Однако ясно, что поскольку мы вводим в рассмотрение негеометрические объекты (такие, как сила), то должны ввести и аксиомы, отражающие свойства этих объектов. Поэтому использование негеометрических аксиом является в данном случае естественным. Можно сказать, что изложенные в этой книжке доказательства основываются не на той системе понятий и аксиом, которая используется в геометрии, а на другой, содержащей также понятия и постулаты механики. Тот факт, что при помощи этих постулатов удается доказать чисто геометрические теоремы, свидетельствует о непротиворечивости наших представлений о физическом мире.

---

*) Представление о *гибкой* линии встречается в книге: В. А. Успенский, Некоторые приложения механики к математике, М., Физматгиз, 1958, а об *упругой* линии — в книге: Л. А. Люстерник, Кратчайшие линии, М., Гостехиздат, 1955. В каждой из названных книг эти представления используются для доказательства некоторых геометрических теорем.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Сложение сил 3

1. Основные положения 3
2. Теорема о биссектрисах углов треугольника 6
3. Вторая теорема о биссектрисах углов треугольника . 6
4 Теорема о высотах треугольника 7
5. Теорема о медианах треугольника 8
6. Обобщение теоремы о биссектрисах внутренних углов треугольника 8
7 Теорема Чевы 10
8. О точке приложения равнодействующей 13
9. Третья теорема о биссектрисах углов треугольника . 14
10. Четвертая теорема о биссектрисах углов треугольника 15

§ 2. Невозможность вечного двигателя 15

11. Момент силы 15
12. Теорема о перпендикулярах к сторонам треугольника 17
13. Теорема Пифагора 18
14. Теорема о касательной и секущей 19
15 Теорема о двух хордах 20

§ 3. Центр тяжести, потенциальная энергия и работа 21

16. Центр тяжести 21
17 Потенциальная энергия 24
18. Центры тяжести некоторых площадей и линий 24
19. Объем цилиндроида 31
20 Объем пирамиды 37
21 Объем тела вращения (первая теорема Гюльдена) . . 38
22. Объем шара 43
23. Объемы некоторых других тел вращения 44
24. Поверхность тела вращения (вторая теорема Гюльдена) 48
25. Поверхность шара 52
26. Поверхности некоторых других тел вращения 53

Заключение 54